Графы

1. Простейшие св-ва графов

Опр.) Граф – пара мн-в $G = (V, E)$,
где $V \neq \varnothing$ – мн-во вершин графа,
$\forall v \in V$ – вершина, E – мн-во ребер графа,
$\forall e \in E$ – ребро
сопоставлена пара (v, w), где $v, w \in V$ $e = (v, w)$

1. V, E конечны
2. если пары (v, w) – упорядочены, то граф назыв. ориентированным, (ориент. ребро – дуга)
если пары (v, w) не упорядочены, то граф наз. неориентированный

Пример:

$V = \{1, 2, 3\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$,

где

$e_1 = (1, 1)$

$\left\{ \begin{array}{l} e_2 = (1, 2) \\ e_3 = (1, 2) \end{array} \right.$

$e_4 = (1, 3)$

$e = (v, w)$

$v (w)$ – конец ребра e

e соединяет v и w

e и $v (w)$ инцидентны

v и w – смежные по e

(соседние по e)

Ребро вида (v, v) назыв.-ся петля

Рёбра вида $e_1 = (v, w)$ наз. кратными
$e_2 = (v, w)$ рёбрами

Псевдограф – граф с возможными петлями и кратными рёбрами

Мультиграф – граф без петель, но возможно с кратными рёбрами

Простой (обыкновенный) граф – граф без петель и кратных рёбер

Опр. два графа (без петель и кратных ребер)

$G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ наз. изоморфными

если $\exists$ взаимно-однозначн. $\varphi: V_1 \to V_2$

$\forall v, w \in V_1 \quad (v, w) \in E_1 \iff (\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2$

Опр. Пусть $G = (V, E)$ – граф. Степень вершины $v \in V$ $d(v)$ – число исходящих из неё рёбер.

$d(v) = 0$ – изолированная вершина

$d(v) = 1$ – висячая (концевая) вершина

Пр. 1 (ф-ла Эйлера для степеней вершины)

1. В любом графе $G=(V,E)$ верно равенство
$$\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$$

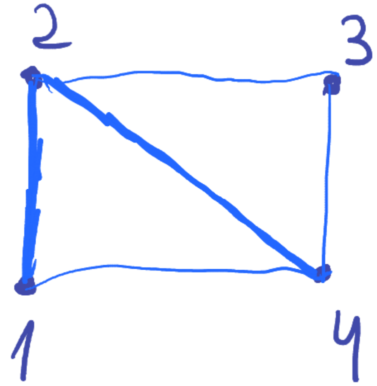
2. В любом графе число вершин нечетной степени четно.

Опр. Путь из v_0 в v_m в G — послед-ть
$$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{m-1} e_m v_m$$
где $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$, $\forall i = \overline{1,\dots,m}$

1. (v_0, v_m) — путь
2. v_0 — начало пути, v_m — конец пути
3. в простых графах рёбра можно не писать

Пример:

G



(1,4) – путь

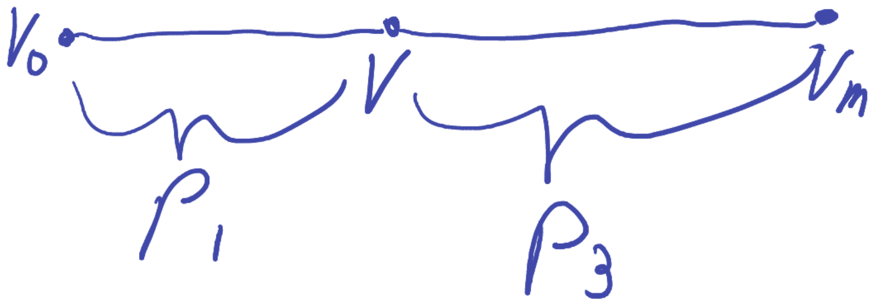
1 2 1 2 4

Опр. Цепь – путь без повторений рёбер

Опр. Простая цепь – цепь без повторений вершин

Пр. 2 Из любого (v_0, v_m) пути в графе G можно выделить простую (v_0, v_m)-цепь в G

Док-во:



$$P = v_0\, v_1 \dots v_m$$

1. В пути P $\forall$ верш. не повторяется.

   Тогда P – простая цепь

2. В пути P вершина v повторяется

$$\underline{P} = v_0 P_1 v P_2 v P_3 v_m \to \underline{P'} = v_0 P_1 v P_3 v_m$$

в P' меньше рёбер, чем в $\underline{P}$

Опр. Путь замкнут, если $v_m = v_0$.

Опр. Цикл — замкнутая цепь.

Простой цикл — замкн. путь, в котором все вершины, кроме последней, различны

Опр. Граф $G = (V, E)$ наз. связным, если

$\forall v, w \in V \quad \exists (v, w)$ — путь в G

(простая (v,w)-цепь)

по пр. 2

Граф $H=(V', E')$ наз. подграфом графа $G=(V,E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$

Определим отношение на мн-ве V:

$\forall v,w \in V$ $v \to w$ если $\exists (v,w)$ - путь в G

1. рефлексивность $\forall v \in V$ $v \to v$
2. симметричность $\forall v,w \in V$ из $v \to w$ следует $w \to v$
3. транзитивность $\forall u,v,w$: из $u \to v$, $v \to w$ следует $u \to w$

следовательно:

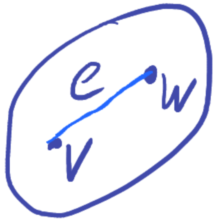
$\to$ - отношение эквивал.-ти на V

класс эквивал-ти по $\to$ назыв.

компонентой связности

Операции над графами

1. Удаление ребра из графа

$G =$ 

$\longrightarrow$ $G' =$ 

$$G = (V, E),\ e \in E \rightarrow G - e = (V, E / \{e\})$$

2. Добавление нового ребра к графу

G 

$\longrightarrow$ G' 

$$G = (V, E),\quad e = (v, w) \notin E \rightarrow G + e = (V, E \cup \{(v,w) = e\})$$

3. Удаление вершины из графа

G 

$\longrightarrow$ G' 

$$G = (V, E),\ v \in V,\ (v, v_1), \ldots, (v, v_k) \in E \rightarrow G - v = (G \setminus \{v\}, E \setminus \{(v, v_1), \ldots, (v, v_k)\})$$

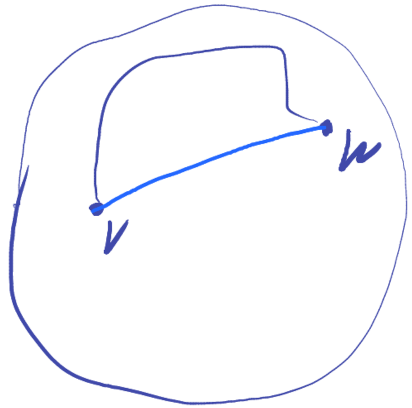
Лемма 1 Если к связному графу добавить новое ребро, то в полученном графе найдется цикл.

Если $G=(V,E)$ – связный граф, $e=(v,w)\notin E$, то в $G+e$ найдется цикл

Док-во:

G

$\longrightarrow G+e$, $e = (v,w)$



Связный: $\exists$ простая (v,w)-цепь C в G

Цепь C есть в $G+e$

$v\,C\,w\,(w,v)\,v$ – цикл

Лемма 2 Если в связном графе удалить ребро из цикла, то останется связный граф

Если $G = (V, E)$ – св. граф, $e \in E$ принадл. циклу, то $G - e$ – св. граф

Док-во:

G

связный

$G - e$

$\forall u_1, u_2 \in V \quad \exists (u_1, u_2)$ – путь P в G

Теор. 1

1. В любом графе с p вершинами, q ребрами и s компонентами связности верно:

$$s \geq p - q$$

2. Если дополнительно в графе нет циклов, то $s = p - q$

Д-во: $\exists e \in E$, $G' = G + e$.

Если e соединяет вершины из одной комп. связности, то $s' = s$, иначе $s' = s - 1$. Итак, $s' \geq s - 1$

$$G_0:\quad \underset{1}{\circ} \quad \underset{2}{\circ} \quad \cdots \quad \underset{p}{\circ} \qquad s_0 = p_0$$

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$; $G_i = G_{i-1} + e_i$; s_i – число компонент связности в G_i: $s_i \geq s_{i-1}$

Граф $G_q = G$: $s \geq s_0 - q = p - q$

(равенство – см. п. 1)

2. Деревья

Опр. Дерево – связный граф без циклов

Т. 1 (Об экв-х определениях дерева)

Пусть $G = (V, E)$ – граф, $p = |V|$, $q = |E|$.

Следующие утверждения равносильны:

1. G – дерево
2. G – связный граф и $q = p - 1$
3. G – граф без циклов и $q = p - 1$
4. G – граф без циклов, но при добавл. любого нового ребра будет цикл
5. G – связный, но при удалении любого ребра становится несвязным

Док-во: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$:

G: 1. связный 2. без циклов

$q = p - 1$

По т.1 (предпл. лекция) $1 = s = p - q$

$2 \Rightarrow 3$

Дано: G – связный и $q = p - 1$

Д-ть: G без циклов и $q = p - 1$

Пусть в G есть цикл. Рассмотрим $G' = G - e$, где e – ребро из цикла.

По лемме 2 G' – связный граф

По т.1 $1 = s' \geq p' - q' = p - (q - 1) = p - q + 1 = 2 \Leftrightarrow 1 = 2$?!

(p' – число верш. в G', q' – число рёбер в G')

G – без циклов, ч.т.д.

$3 \Rightarrow 4$ Дано: G – без циклов, $q = p - 1$

Д-ть: G – без циклов, в $G+e$ есть цикл (e – какое-то новое ребро)

Пусть в $G' = G+e$ нет циклов.

По т.1 $s' = p' - q' = p - (q+1) = p - q - 1 = 0$ (?!)

$4 \Rightarrow 5$ Дано: G – без циклов, в $G+e$ есть цикл, где e – нов. ребро

Док-ть: G – связный, $G-e$ – несвязный, где e – $\forall$ ребро из G

1. Пусть G – не связный. Рассм. v, w из разных комп. св. G
Тогда $G' = G + (v,w)$ не имеет циклов

2. Пусть $G' = G - e$ – связный, где e – ребро в G

(?!)

5 => 1

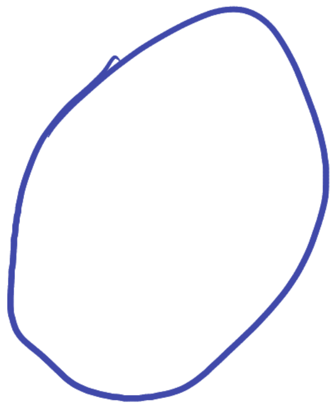
Дано: G - связный, $G-e$ - несвязный $\forall e \in G$

Док-ть: G - связный, G - без циклов

Пусть в G есть цикл. Рассмотрим $G' = G - e$, где e - ребро из цикла. По л. 2 G' - связный (?!)

Ч.т.д.

G

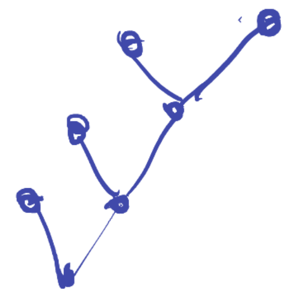


связный

p вершин

q ребер

$q = p - 1$



Опр. Корневое дерево — пара (G, v_0), где $G = (V, E)$ — дерево, $v_0 \in V$ — корень.

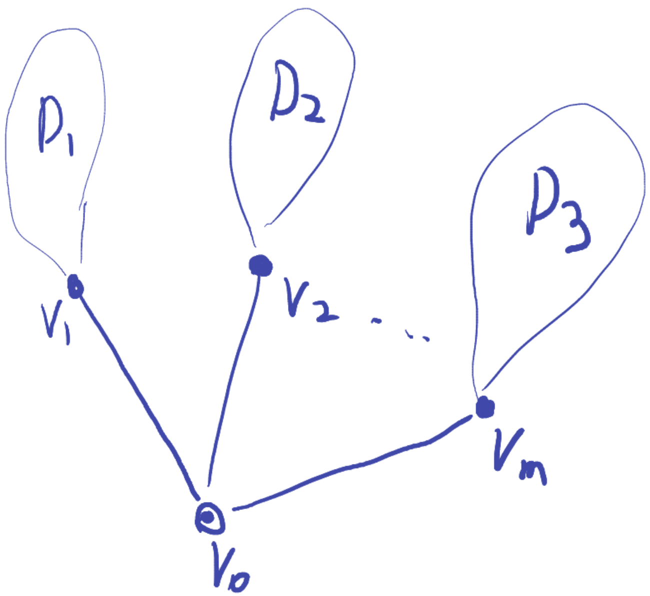
При изоморфизме корневых деревьев корень обязан переходить в корень

(G_1, v_1), (G_2, v_2)

$G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$

$\varphi : V_1 \to V_2$ — изоморфизм (G_1, v_1), (G_2, v_2)

то $\varphi(v_1) = v_2$



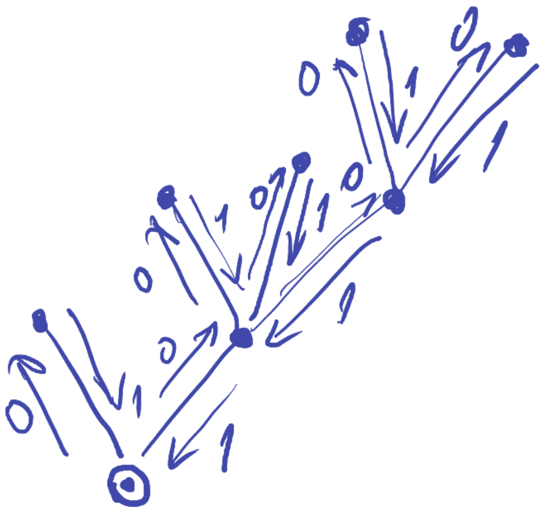
(D, v_0) (D_i, v_i) – поддерево

Опр. Упорядоченное корневое дерево – корневое дерево, в котором

1. поддеревья упорядочены
2. каждое дерево является упорядоченным корневым деревом

Опр. Пусть Д — упор. корневое дерево с поддеревьями Д$_1$, Д$_2$, …, Д$_m$. Тогда:

1. если Д состоит из одной вершины $\odot$, то $k_D = \varnothing$
2. иначе $k_D = (0 k_{D_1} 10 k_{D_2} 10 \ldots 10 k_{D_m} 1)$



$$k_D = (0\,100\,1\,0100\,1\,0111)$$

Т. 2 Число неизоморфных упорядоченных корневых деревьев с q рёбрами

$$\delta(q) \le 4^q$$

Док-во: Д — упор. к. дерево с q рёбрами

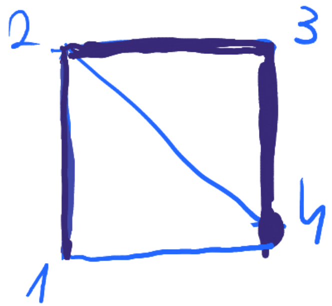
$\downarrow$

k_D

$$\delta(q) \le 2^{2q} = 4^q$$

Опр. Подграф $H=(V,E')$ наз. остовным деревом графа $G=(V,E)$, если H-дерево

Пример:



Тр. 1 В любом связном графе найдется остовное дерево.

Док-во. G - связный

1. если в G нет циклов, то G - остовное дерево в G
2. в G есть цикл; e - ребро из цикл

$G-e$ - связный

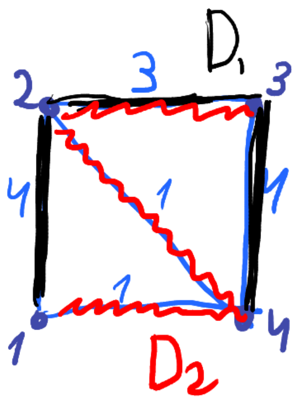
повторим рассуждение для $G-e$

Опр. Граф G – взвешенный, если задано отображение $w: E \to \mathbb{R}_+$ – ф-ция весов, где $G = (V, E)$

Опр. Если $G = (V, E)$ – взвеш. граф с ф-й весов w, и $H = (V', E')$ – его подграф, то вес подгр. H

$$w(H) = \sum_{e \in E'} w(e)$$

Пример:



$w(D_1) = 11$

$w(D_2) = 5$

Опр. Остовное дерево D^* наз. кратчайшим, если $w(D^*) = \min\limits_{D \text{ - ост. дер. в } G} w(D)$

$G=(V,E)$ — связный, взвешенный с весами w

$w(e_1) \le w(e_2) \le \dots \le w(e_q)$

Алгоритм: $G=(V,E)$ — связный граф с весами w

1. $G_0 = (V, \varnothing)$
2. Пусть G_i — построен, $G_i = (V, E_i)$

   Тогда $G_{i+1} = (V, E_{i+1})$, где $E_{i+1} = E \cup \{e_{i+1}\}$,

   $w(e_{i+1}) = \min\{w(e) \mid e \in E \setminus E_i,\ (V, E_i \cup \{e\}) \text{ — без циклов}\}$

G_{p-1} — остовное дерево. $p = |V|$

Т. 3 Описанный алгоритм строит кратчайшее остовное дерево в графе G

Док-во:

Остовное дерево D в G наз. кратчайшим, если $w(D) = \min w(D')$

D' - остовное дерево в G

Пусть $G = (V, E)$ - связный граф, $|V| = p$, $|E| = q$,

D - остовное дерево, постр. по алгоритму.

Пусть D_1 - кратчайшее остовное дерево в G

В D: $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{k-1}, e_k, \ldots, e_{p-1}$ - в порядке добавл. к D

$w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_{p-1})$

В D_1: $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e_k', \ldots, e_{p-1}'$

Пусть k - наим. число т.ч. $e_1, \ldots, e_{k-1}$ входят в D_1, а e_k - нет

Пусть $G' = D_1 + e_k$. В G' есть ровно 1 цикл C.

В цикл C входит хотя бы одно ребро, которого нет в D.

Пусть $D_2 = G' - e'$ — дерево

1. $w(e') \geq w(e_k)$

$w(D_2) \leq w(D_1)$ — кратч.

$w(D_2) = w(D_1)$

Получаем: D_2 — кратчайшее ост. дерево G

Повторим рассужд. для D_2.

В итоге, покажем, что D — кратч. остовное дерево.

3. Планарность

Опр. Геометрическое представление графа $G = (V, E)$ в $\mathbb{R}^n$ —

1. $\forall v \in V$ сопоставлена $a_v \in \mathbb{R}^n$

   $v \neq w;\ v, w \in V \Rightarrow a_v \neq a_w$

2. $\forall e = (v, w) \in E$ сопоставлена непрерывная линия l_{vw}, соединяющая a_v и a_w, и не проходящая через точки, сопоставленные другим вершинам

3. Линии, сопоставленные разным рёбрам, не пересекаются, за исключением концевых точек

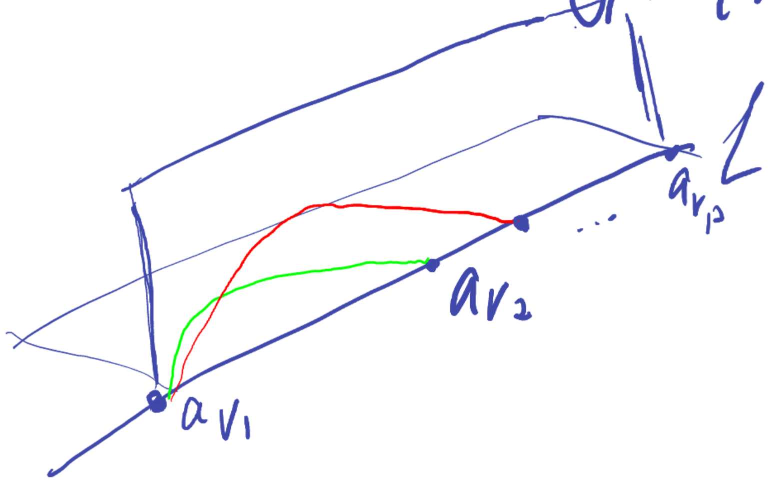
K_4

Т. 1 (о геом. пр. графов в $\mathbb{R}^3$)

Любой граф можно геометрически представить в $\mathbb{R}^3$

<u>Док-во:</u>

$G = (V, E)$; $V = \{v_1, \dots, v_p\}$; $E = \{e_1, \dots, e_q\}$

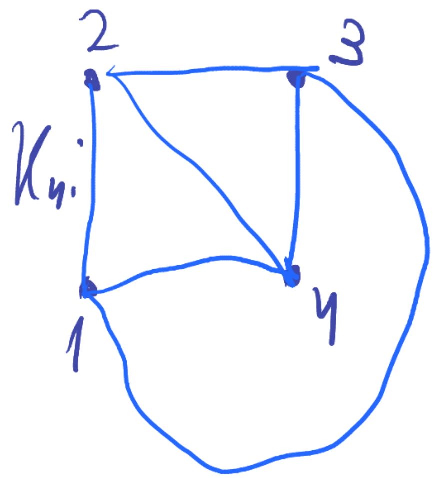


q полуплоскостей, содержащих L

$e_i = (v_{i_1}, v_{i_2})$ ... – сопоставим $l_{v_{i_1}, v_{i_2}}$ в полупл-ти i

ч.т.д.

Опр. Граф G наз. планарным, если он допускает геом. представление на пл-ти (в $\mathbb{R}^2$). Если граф не является планарным, то он наз-ся непланарным.



Грань:

Пусть задано геометр. предст. графа G на пл.-ти

$a, b \in \mathbb{R}^2$

$a \to b$, если точки a и b можно соединить непр. кривой, не содержащей точек, принадл. рёбрам и вершинам G

Класс эквивал.-ти относительно отношения эквивал.-ти $\to$ — грань G при заданном план. представлении.

Т. 2 (ф-ла Эйлера для планарных графов)
Если $G=(V,E)$ – связный планарный граф с p верш. и q рёбрами, то для $\forall$ его планарного представления верно равенство:

$$p-q+r=2,$$ где r – число граней в этом планарном представлении.

Док-во: Индукция по числу рёбер q при заданном числе вершин p.

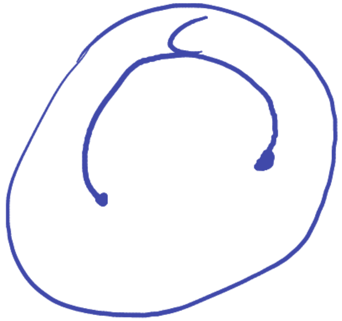
Базис: $q=p-1$, т.е. G – дерево

$$p-(p-1)+1=2$$

Инд. переход: пусть для связных планарных графов с p вершинами и $q_0 \geq p-1$ рёбрами утверждение верно.

Рассм. G – связный планарный граф с p вершинами и q_0+1 рёбрами.

В G обязательно найдется цикл

G  $\longrightarrow$ $G' = G - e$ 

Путь e - ребро из цикла

$q_0 + 1$

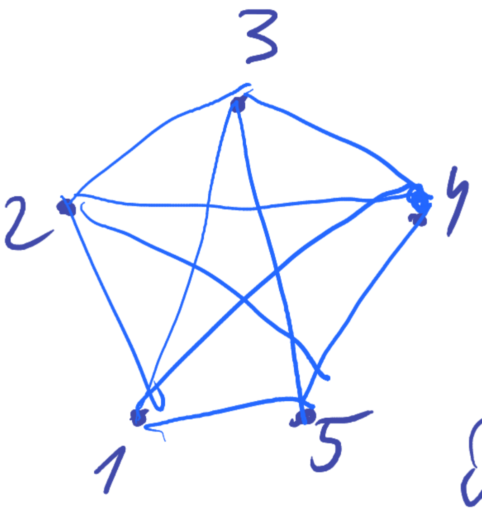
1. планарный
2. связный
в G' q ребер

Для G' верно предп. индукции

$$p' - q' + r' = 2$$

$$p - (q-1) + (r-1) = p - q + r = 2$$

ч.т.д.



П. 3 Граф K_5 не явл. планарным

Док-во от противного

Пусть K_5 – планарный

Рассмотрим его планарное предст.

Тогда по т. Эйлера

$$p - q + r = 2,$$

где $p = 5$, $q = 10$, r – число граней.

$$5 - 10 + r = 2 \Rightarrow r = 7$$

Грани $1, 2, \dots, r$

q_i – число рёбер в цикле, который ограничивает i-ю грань.

$$\sum_{i=1}^{r} q_i = 2 \cdot q,$$ т.к. $\forall$ ребро имеет 2 стороны, по которым к нему примыкают 2 грани.

Но $\forall q_i \geq 3$ т.к. графы простые

$$3r \leq 2 \cdot q$$

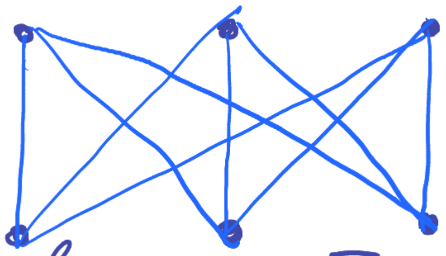
$$r \leq \frac{2}{3} \cdot q$$

$$r \leq \frac{2}{3} \cdot 10$$

(?!)

ч.т.д.

$K_{3,3}$



полный двудольный граф $K_{m,m}$

Т. 4 Граф $K_{3,3}$ не явл. планарным

Док-во: От противного

Пусть $K_{3,3}$ — планарный

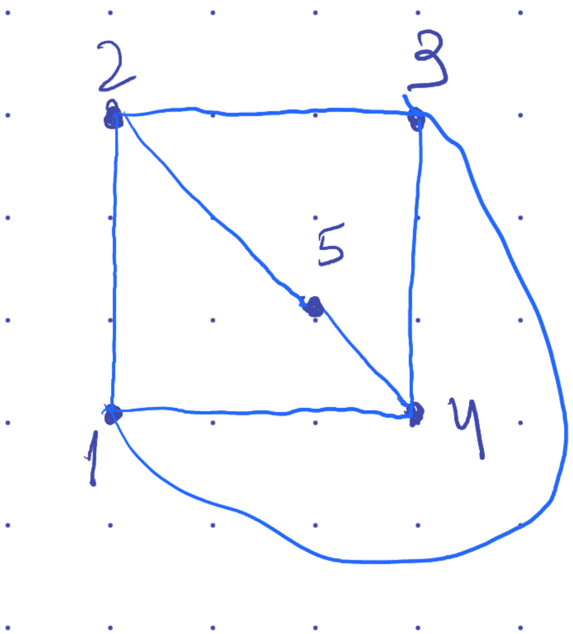
Рассмотрим его планарн. предст.

По т. Эйлера $p - q + r = 2$; $p = 6$, $q = 9$ $\Rightarrow$ $r = 5$

грани $1, 2, \ldots, r$; q_i — число рёбер в цикле, огран-м i-ю грань

$4r \leq \sum_{i=1}^{r} q_i = 2 \cdot q$ (т.к. ребро имеет 2 стороны, по кот. к нему примык. 2 грани.

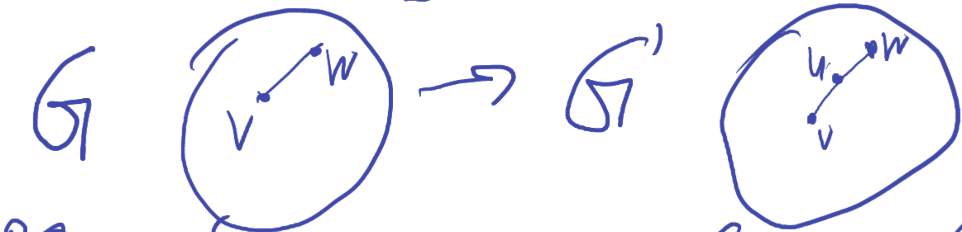
Но $\forall q_i \geq 4$ для $K_{3,3}$. $4r \leq 2 \cdot q$; $r \leq \frac{9}{2}$; $5 \leq \frac{9}{2}$



Опр. Операция подразбиения (подразделения) ребра — переход от графа $G=(V,E)$ к графу $G'=(V',E')$, где $(v,w)\in E$, $u\notin V$

$$E' = (E\setminus\{(v,w)\})\cup\{(u,v),(v,w)\}$$

$$V' = V\cup\{u\}$$

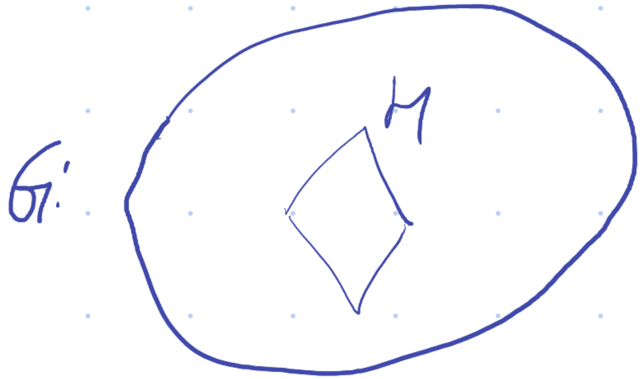


Опр. Граф G' наз-ся подразбиением графа G, если G' получ. из G конечным числом операций подразбиения ребра.

Опр. Графы G_1 и G_2 наз. гомеоморфными, если сущ. их подразбиения G_1 и G_2, которые изоморфны.

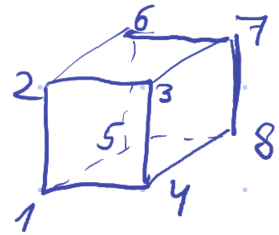
Т.4 (критерий планарности Понтрягина – Куратовского).
Граф G планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$
Док-во:

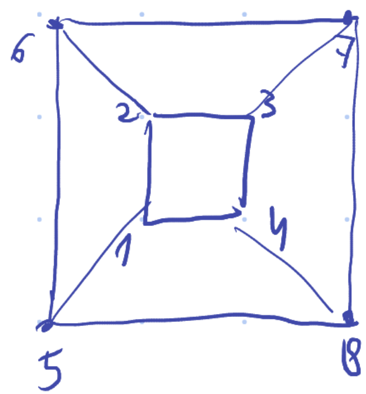
1. Пусть граф G – планарен.
Рассмотрим его геом. представление в $\mathbb{R}^2$. Если в нем содержится гомоморфный K_5 или $K_{3,3}$ подграф, то K_5 или K_3 имеет планарное представл. (?!)



2. Обратное – без док-в.

Пример:





4. Раскраска графов

$G=(V,E)$

Пусть $C=\{1,2,\dots\}$ — мн-во цветов.

Опр. Раскраской (вершин) графа $G=(V,E)$ наз.-ся отображение $p: V\to C$, где $\forall (v,w)\in E:\ p(v)\neq p(w)$

Пример:

G:

Опр. Наименьшее число цветов, в которое можно окрасить вершины гр. G, наз. его хроматическим числом $\chi(G)$

Если $G=(V,E)$, то $\chi(G)\leq |V|$

C_6:

$\chi(C_6)=2$

Опр. Мн-во $V' \subseteq V$ наз. независимым мн-м вершин графа $G=(V,E)$, если $\forall v,w \in V'$, $v \neq w$ $(v,w) \notin E$.

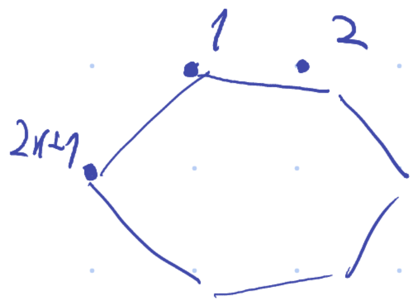
Раскраска вершин в графе $G=(V,E)$ — такое приписывание каждой вершине некот. цвета, при котором все вершины одного и того же цвета образуют независимое мн-во.

Опр. Граф G наз.-ся двухцветным, если $\chi(G)=2$

Т.1 (Кенига)

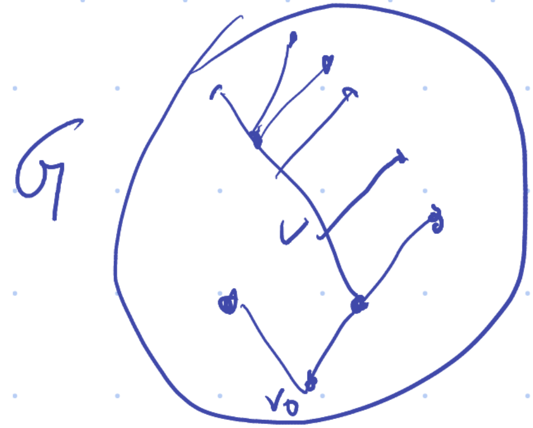
Граф G явл.-ся двухцветным, тогда и только тогда, когда в нём нет циклов нечетной длины.

Док-во: 1. Пусть в G есть цикл дл. $m = 2k+1$ C_m — подграф G



2. Пусть в G нет циклов нечёт. длины $G = (V, E)$.
Пусть D — остовное дерево в G
$v_0 \in V$

$\forall v \in V$ в D сущ. ровно одна простая (v_0, v) — цепь.



$C_1 = \{v \in V \mid |C_v|$ — длина цепи — нечётна$\}$
$C_2 = \{v \in V \mid |C_v|$ — чётна$\}$ $v_0 \in C_2$

Покажем, что C_1 и C_2 — незав. мн-ва в G. От противного:
Пусть $v_1, v_2 \in C_1$ $(v_1, v_2) \in E$. Рассм. замкнутый путь в G.
$P = v_0\, C_{v_1}\, v_1 (v_1, v_2) v_2\, C_{v_2}\, v_0$. Длина пути P — нечётна
$|P|$ — нечётна. Чётность длин C_{v_1} и C_{v_2} — одинаковые,
сумма их длин — чётное число. (?!)

Опр. Граф наз. двудольным, если мн-во его вершин можно разбить на 2 незав.-х мн-ва.

1. $\chi(G) = 1$ ✓
2. $\chi(G) = 2$ ✓
3. $\chi(G) = 3$?

Лемма 1

Если $G(V, E)$ – планарный граф, то $\exists v \in V : d(v) \leq 5$

Док-во: (от противного.)

Пусть в связном планарном графе $G = (V, E)$

$\forall v \in V \quad d(v) \geq 6 \qquad |V| = p, \ |E| = q$

1. По ф-ле Эйлера для степ. вершин $6p \leq \sum\limits_{v \in V} d(v) = 2 \cdot q$; $q \geq 3p$
2. По ф-ле Эйлера для план. графов: $p - q + r = 2$, где $\overset{6}{\geq}$ r – число гр.

Пусть грани $1, 2, \ldots, r$; q_i – число сторон i-й грани. $3r \leq \sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 2 \cdot q$

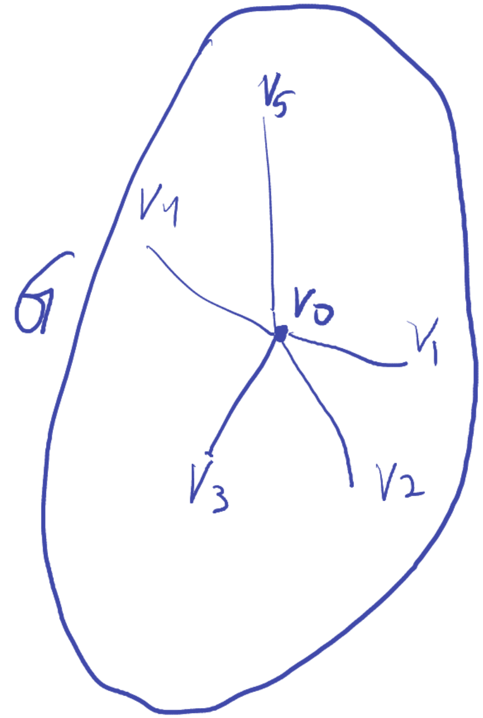
$r \leq \frac{2}{3} q \qquad r = q - p + 2 \leq \frac{2}{3} q \qquad \frac{1}{3} q \leq p - 2 \qquad q \leq 3p - 6$

Т. 2 Если G — план. граф, то $\chi(G) \le 5$

Док-во: индукция по числу вершин

Базис $p=1$

Инд. переход: пусть $\forall$ план. граф с $\le p_0$ вершинами можно раскр. ≤ 5 цветов.



Рассмотрим $G=(V,E)$ — планарный, $|V| = p_0+1$

Пусть G — геом. пр. в $\mathbb{R}^2$

По п. 1 в G найдется $v_0 \in V$: $d(v_0) \le 5$.

$G' = G - v_0$ планарный, в нём p_0 вершин по предп. индукции. Красим G' в ≤ 5 цветов c_1, c_2, c_3, c_4, c_5

1. если $d(v_0) \le 4$ или среди цветов $v_1 - v_5$ нет какого-то цвета, то красим v_0 в отс.-й цвет

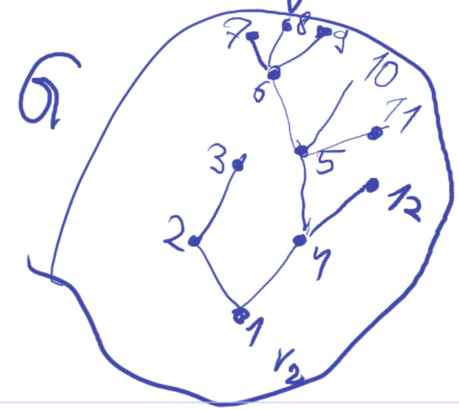
2. пусть v_i окрашена в c_i, $i=\overline{1,5}$. $A_{1,3}(v_1)$ — мн-во верш. гр. G, в которые можно перейти из v_1 по цветам c_1, c_3. 1.) $v_3 \in A_{1,3}(v_1)$. Перекрасим верш. из $A_{1,3}(v_1)$: $c_1 \to c_3$, $c_3 \to c_1$ и припишем $v_0 \to c_1$ 2) $v_3 \in A_{1,3}(v_1)$: $A_{2,4}(v_2)$ — мн.-во верш. G, в кот. можно перейти из v_2 по c_2, c_4. $v_4 \notin A_{2,4}(v_2)$ — всегда

$\chi(G) \leq |V|$ — грубая оценка

Опр. Для графа $G=(V,E)$ $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V} d(v)$

Пр. 2 Для произвольного графа $G(V,E)$ верно $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$

Док-во: G — связный граф. Пусть D — остовное дерево G. Обойдём D в глубину.



При этом корню припишем 1, а каждой новой встреч. вершине будем приписывать след. номер. $\forall v \in V$ — $\exists$ v смежна хотя бы $v \neq v_2$ одна вершина с меньшим номером.

Раскрасим верш. из V в $\Delta(G)+1$ цвет $C = \{1; 2; \dots; \Delta(G), \Delta(G)+1\}$ по убыванию номеров вершин $v_p, v_{p-1}, \dots, v_2, v_1$; $p = |V|$. $i \neq 1$: v_i, $v_p, \dots, v_{i+1}$ — уже раскрашены. С v_i смежна хотя бы одна вершина с меньшим номером, она ещё не раскрашена.

С v_i смежны $\le \Delta(G)-1$ раскрашенная вершина

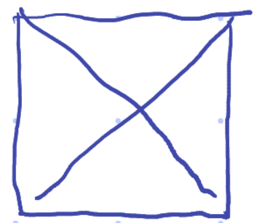
Окрасим v_i в цвет из $\{1,\dots,\Delta(G)\}$, который не встреч. среди окр. смежных с ней вершин.

Верш. v_i м.б. смежна с $\Delta(G)$ окр. верш.

если так, припишем ей новый цвет $\Delta(G)+1$,

если нет — то цвет, который не встр. среди окр. смежных с ней вершин ч.т.д.

K_n:



$\Delta(K_n)=n-1$

$\chi(K_n)=n$

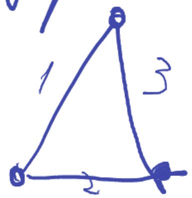
— оценка достигается.

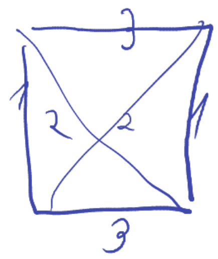
Т. (Брукса) Если G — не полный граф и не явл.-ся циклом нечетной длины, то $\chi(G)\le\Delta(G)$

Опр. Раскраска рёбер графа $G=(V,E)$ в k цветов отображение $\rho: E \to \{1,2,\dots,k\}$:

$\forall (v,w) \in E$, $(v,u) \in E$ верно $\rho((v,w)) \neq \rho((v,u))$

Пример:





Опр. Наименьшее число цветов, в кот. можно раскр. рёбра G, наз. хроматическим индексом $\chi'(G)$

$$\forall G=(V,E) \qquad \chi'(G) \geqslant \Delta(G)$$

Т. Визинга $\quad \forall G \quad \Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$